XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 12 октября 2008.

Второй тур. Лига стратегий

1. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2008 цветов, чтобы на каждом отрезке в пространстве встречались все 2008 цветов?

2. Одна из общих внешних касательных к непересекающимся окружностям S_1 и S_2 касается их в точках A и B соответственно, а вторая — в точках C и D соответственно. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Прямые NA и NB пересекают эти окружности в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP, DQ и MN пересекаются в одной точке.

3. В клетках таблицы 10×100 написаны целые числа. Разрешается выбрать любую клетку и вычесть из стоящего в ней числа количество соседних по стороне клеток, а к числам, стоящим в соседних клетках, прибавить по 1. Всегда ли из таблицы, сумма чисел в которой равна 0, такими операциями можно получить таблицу, целиком заполненную нулями?

4. Дано натуральное число n. Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n - 1$. Найдите наибольший общий делитель всех произведений $C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \ldots \cdot C_n^{x_n}$.

5. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине одно число так, чтобы в концах каждого ребра стояли различные числа.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Точки D и E на прямой AB (порядок точек $D - A - B - E$) таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны в точках P и Q, а описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Прямые, соединяющие A с центром описанной окружности треугольника BME и B с центром описанной окружности треугольника AND, пересекаются в точке X. Докажите, что $CX \perp PQ$.

7. Дана последовательность положительных чисел $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что существует такое натуральное n, для которого выполняется неравенство

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1 x_2}} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{\sqrt{x_2 x_3}} + \ldots + \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{\sqrt{x_n x_{n+1}}} \geqslant \frac{14}{5} x_1.$$

8. Перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2007})$ множества $(1, 2, \ldots, 2007)$ удовлетворяет условию $a_k^2 \leqslant (k+3) a_{k+1}$ для всех k от 1 до 2006. Докажите, что найдется такое натуральное число $n \leqslant 2007$, для которого $a_n = n$.

9. Докажите, что функция $f(n) = n^{2008} - n!$ в разных натуральных точках принимает различные значения.

10. Числа $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ — перестановка чисел $0, 1, \ldots, n$. Найдите все многочлены $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ такие, что $f(x)$ имеет n вещественных корней с учетом кратности.

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 12 октября 2008.

Второй тур. Лига стратегий

1. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2008 цветов, чтобы на каждом отрезке в пространстве встречались все 2008 цветов?

2. Одна из общих внешних касательных к непересекающимся окружностям S_1 и S_2 касается их в точках A и B соответственно, а вторая — в точках C и D соответственно. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Прямые NA и NB пересекают эти окружности в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP, DQ и MN пересекаются в одной точке.

3. В клетках таблицы 10×100 написаны целые числа. Разрешается выбрать любую клетку и вычесть из стоящего в ней числа количество соседних по стороне клеток, а к числам, стоящим в соседних клетках, прибавить по 1. Всегда ли из таблицы, сумма чисел в которой равна 0, такими операциями можно получить таблицу, целиком заполненную нулями?

4. Дано натуральное число n. Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n - 1$. Найдите наибольший общий делитель всех произведений $C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \ldots \cdot C_n^{x_n}$.

5. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине одно число так, чтобы в концах каждого ребра стояли различные числа.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Точки D и E на прямой AB (порядок точек $D - A - B - E$) таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны в точках P и Q, а описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Прямые, соединяющие A с центром описанной окружности треугольника BME и B с центром описанной окружности треугольника AND, пересекаются в точке X. Докажите, что $CX \perp PQ$.

7. Дана последовательность положительных чисел $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что существует такое натуральное n, для которого выполняется неравенство

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1 x_2}} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{\sqrt{x_2 x_3}} + \ldots + \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{\sqrt{x_n x_{n+1}}} \geqslant \frac{14}{5} x_1.$$

8. Перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2007})$ множества $(1, 2, \ldots, 2007)$ удовлетворяет условию $a_k^2 \leqslant (k+3) a_{k+1}$ для всех k от 1 до 2006. Докажите, что найдется такое натуральное число $n \leqslant 2007$, для которого $a_n = n$.

9. Докажите, что функция $f(n) = n^{2008} - n!$ в разных натуральных точках принимает различные значения.

10. Числа $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ — перестановка чисел $0, 1, \ldots, n$. Найдите все многочлены $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ такие, что $f(x)$ имеет n вещественных корней с учетом кратности.